A.R.I. Associazione Radioamatori Italiani

Sezione di Pontassieve

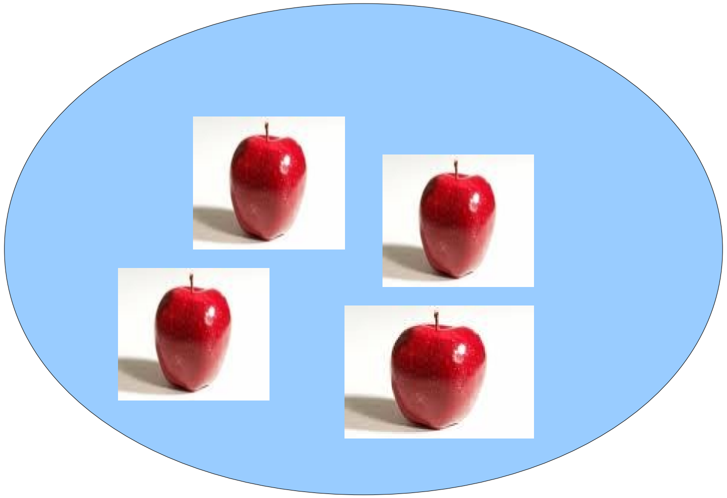
# “Dai numeri naturali alle equazioni di Maxwell”

*Quattro chiacchere di Fisica 2*

Marco - I5 PUU

# INSIEMI

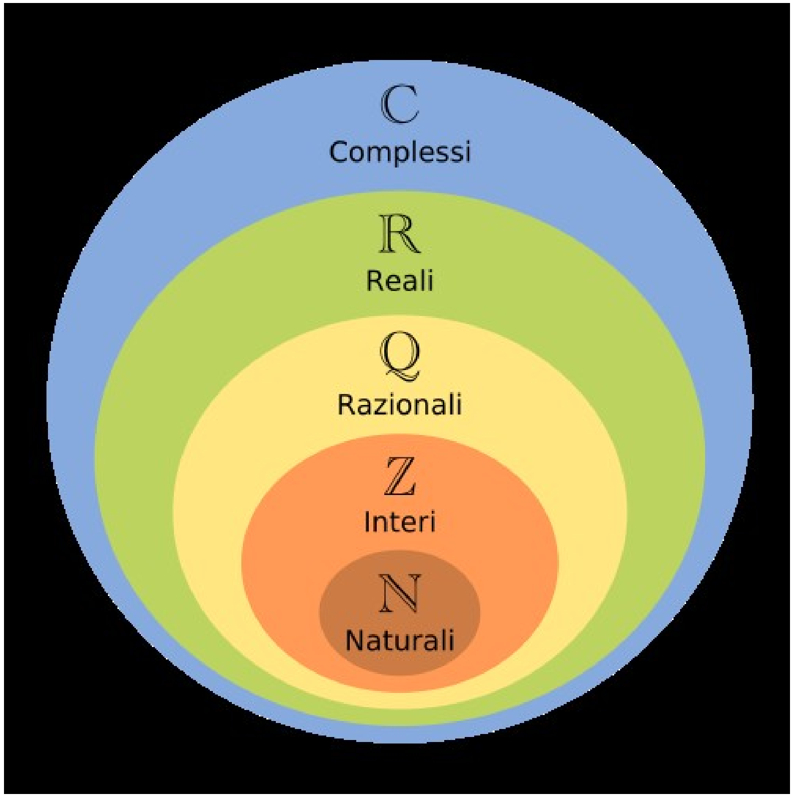
Con il termine “insieme” si intende un raggruppamento, una collezione di elementi, per esempio un insieme di mele, un insieme di apparecchiature radio, etc.



***Insieme di mele***

***Insieme di “radio”***

Alcuni “insiemi “ interessanti sono gli **insiemi numerici**




**L'INSIEME N**

L’insieme dei numeri naturali è così denominato perché viene spontaneamente utilizzato per associare agli oggetti il concetto astratto di numero

{0, 1, 2, 3, 4,......}

**Le operazioni in N**

**L’addizione e la moltiplicazione** sono operazioni ben definite in N (il risultato è sempre un numero naturale)

**Es.**

3+4=7 3x4=12 6+8=14

6x8=48 10x3=30 10+3=13

**La sottrazione** non è ben definita: in alcuni casi non si può eseguire

Es.

30-3=27 28-29=? 56-20=36

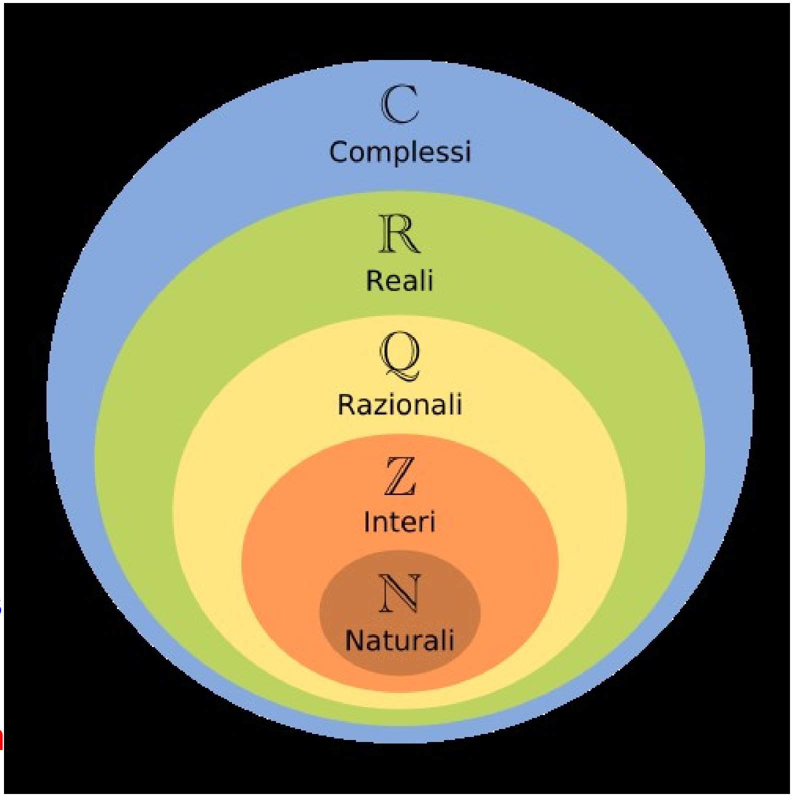
39-81=? 45-56=? 48-12=36

Per dare una risposta a qualsiasi sottrazione, i matematici hanno inventato i numeri relativi (con il segno)

## L'INSIEME Z - INSIEME DEI NUMERI INTERI

{...,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,......}

(I numeri positivi si identificano con i Naturali: +3 = 3)




**Le operazioni in Z**
**L'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione**
sono operazioni ben definite in Z
 (il risultato è sempre un numero intero relativo)
**Es.**
-3+4= +1 -3- 4 = -7 +3+4 =+7
(-3)*(-4)= +12 (+3)*(+4)= +12 (+3)*(-4) = -12

**La divisione** non è ben definita: in alcuni casi non si può es
(-30) : (-10) = +3
(+4) : (+5) = ?
Per dare una risposta a qualsiasi divisione, i matematici han
razionali relativi
-3/4 +6/5 +5/2

**L’INSIEME Q**

L’insieme Q dei numeri razionali relativi:

n Naturali
n Interi relativi
n Decimali limitati relativi
n Decimali illimitati periodici semplici
n Decimali illimitati periodici misti

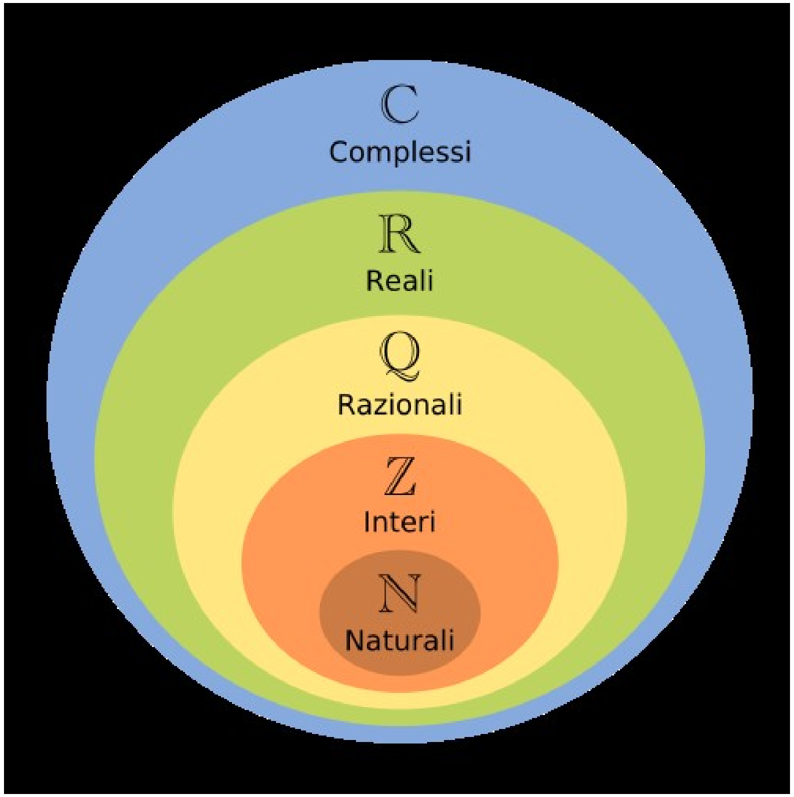
**Le operazioni in Q**

**L’addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la**
**ben definite in Q**

(il risultato è sempre un numero razionale relativo)

Es. 3:4 = 3/4

La radice non è ben definita: in alcuni casi non si può eseguire.




Per dare una risposta a qualsiasi radice con radicando positivo, i matematici hanno inventato i numeri irrazionali: **i radicali**

# L’INSIEME R

L’insieme R è costituito dall’unione dei numeri razionali con i numeri irrazionali

**Le operazioni in R**

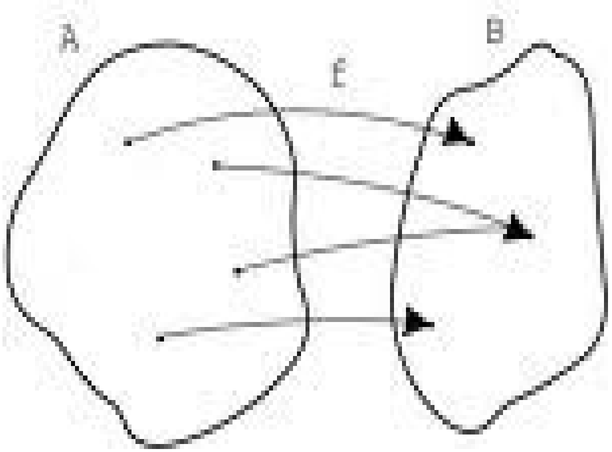
**L’addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e la radice ennesima con radicando positivo** sono operazioni ben definite in R
(il risultato è sempre un numero reale)
La radice non è ancora ben definita: in alcuni casi non si può eseguire
La radice di indice pari di un reale negativo non si può eseguire in R:
Per dare una risposta a qualsiasi radice, anche con il radicando negativo, i matematici hanno inventato **i numeri complessi**

## L’INSIEME C

Viene definito il valore $i^2 = -1$ e al valore i viene dato il nome di “unità immaginaria”.
I numeri complessi sono formati da due parti, una parte reale e una parte immaginaria,
E sono rappresentati dalla seguente espressione.

$$A + i B$$

# Funzioni




Considerato un insieme A ed un insieme B, una funzione “f” è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed uno solo elemento di B.

Una funzione si indica nel seguente modo:

$$y = f(x)$$

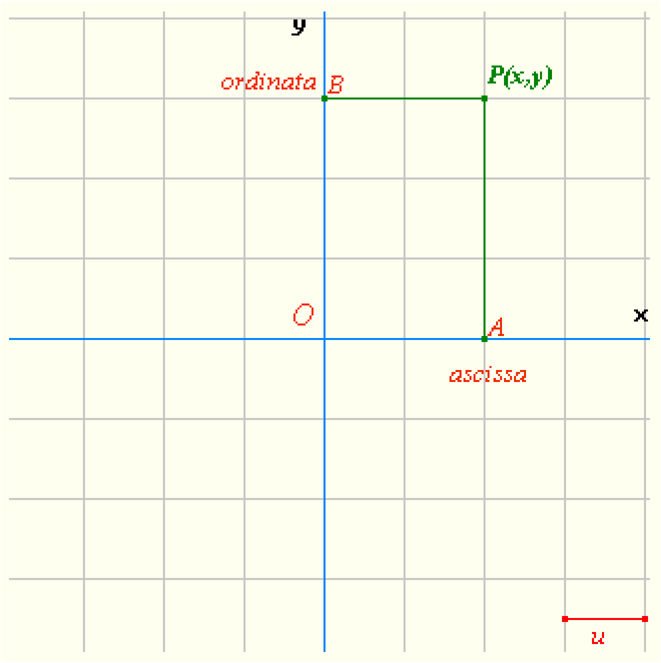
Si dice che x è l'argomento della funzione, oppure un valore della variabile indipendente, mentre y è un valore della variabile dipendente della funzione

Vediamo qualche esempio di funzione:

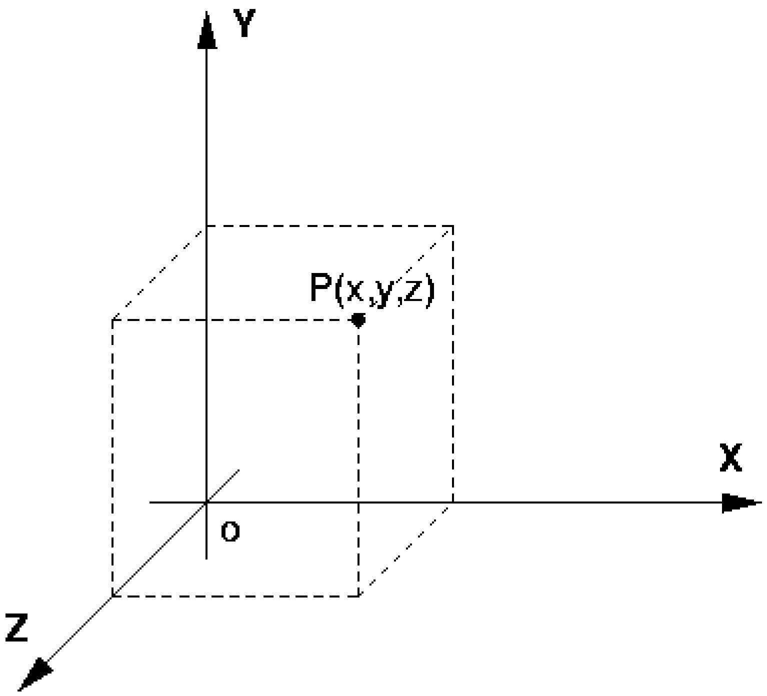
# la funzione della retta $y = mx + q$

Per capire meglio il significato di funzione è bene ricordare il significato delle coordinate cartesiane, un metodo per rappresentare su di un piano o nello spazio un punto qualsiasi.

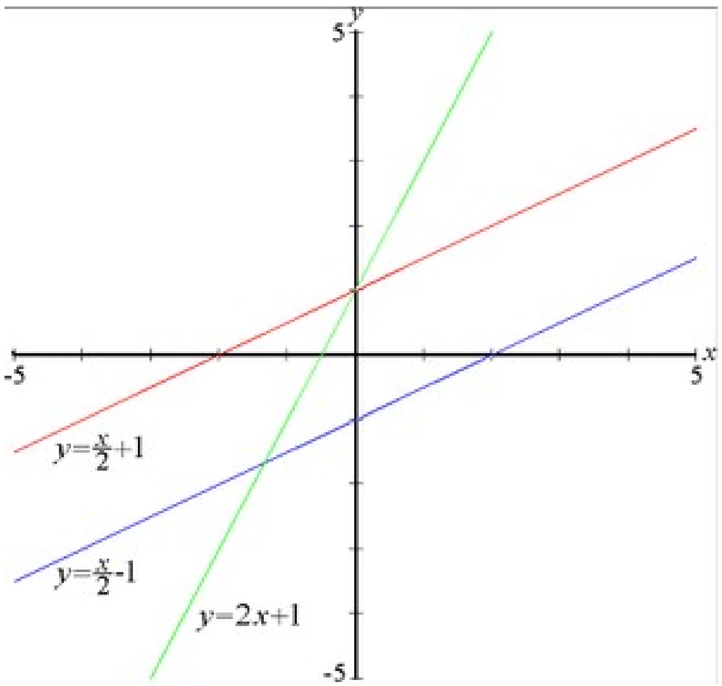
Supponiamo per esempio di lavorare su di un piano, la posizione di un punto qualsiasi P può essere individuata conoscendo le sue coordinate x ed y.




Analogamente si può definire un qualsiasi punto nello spazio, introducendo una terza coordinata.

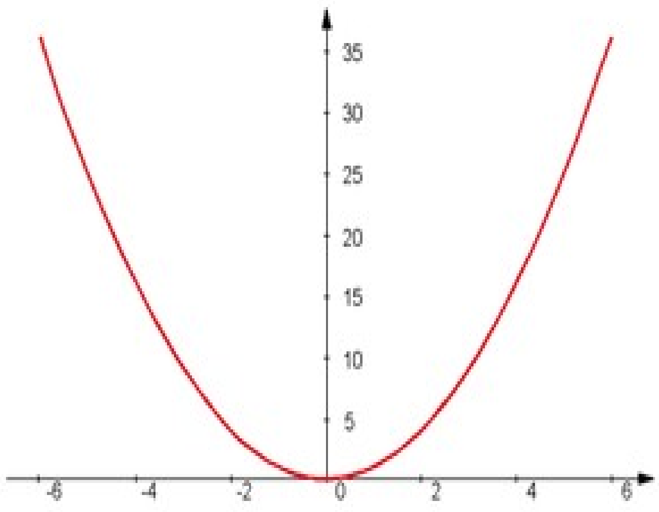


Ritorniamo ora alla nostra funzione che descrive una retta: $y = mx + q$




m rappresenta il coefficiente angolare, cioè la pendenza della cura e q il punto in cui la retta incontra l'asse y.

Nell' esempio di figura la retta di colore rosso attraversa l'asse delle ordinate (l'asse y) nel punto di coordinata +1 ed ha un coefficiente angolare di ½ ( il coefficiente angolare indica la pendenza della retta ed è pari alla tangente dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.
La retta di colore azzurro ha lo stesso coefficiente angolare ma intercetta l'asse delle coordinate nel punto -1. La retta di colore verde intercetta l'asse delle ordinate sempre nel punto +1 ma ha un coefficiente angolare pari a 2.




Un' altro esempio di funzione è l'equazione della parabola che nella sua forma generale vale:

$$y = ax^2 + bx + c$$

La parabola è il luogo dei punti che hanno la stessa distanza da un punto F chiamato “fuoco” e da una retta chiamata “direttrice”

Le coordinate del fuoco sono: F[-b/2a, (1-Discr)/4a] e la retta direttrice ha la seguente equazione: y = -(1+Discr)/4a

Nel caso particolare che b e c siano uguali a zero l'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2$$

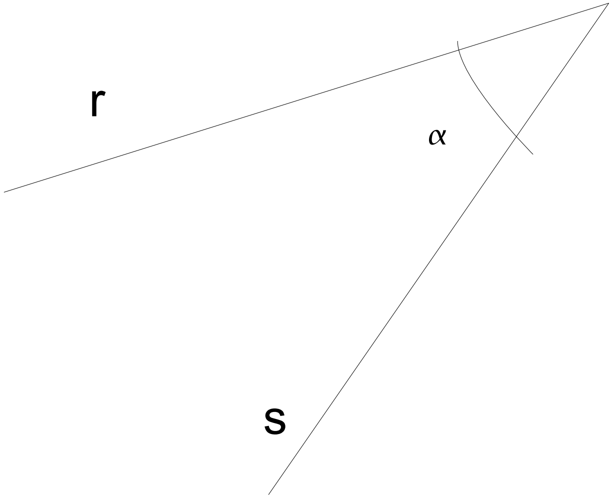
E' una parabola che ha il vertice nel punto di coordinate (0,0) ha come asse la retta con equazione x = 0 , cioè l'asse y e ha il fuoco nel punto F(0, 1/4a)

Delle funzioni molto importanti sono le funzioni **trigonometriche**.

Per esempio, vogliamo calcolare l'altezza di un traliccio senza poterci salire sopra; vediamo come ci può aiutare la trigonometria.

Prima di tutto facciamo un ripasso sugli “angoli” e come si misurano.

*Si consideri una superficie piana, è detta **angolo** ciascuna* delle due parti di piano delimitate da due semirette uscenti da uno stesso punto *appartenente alla superficie.*



Gli angoli si possono misurare in gradi o in radianti.

Il grado è l'ampiezza dell'angolo che sottende un arco di circonferenza pari a 1/360mo della lunghezza totale della circonferenza. L'angolo α = 1° può essere diviso in 60 parti uguali dette primi di grado (minuti) che si indicano con il segno dell'apostrofo '. I primi d'arco possono essere divisi di nuovo in 60 parti uguali ottenendo i secondi d'arco che si indicano con le virgolette “, si usano poi i decimali.

Come esempio le coordinate geografiche di Poggio Alberaccio, noto colle non solo per le imprese di Mauro, il camminatore, espresse in gradi sessagesimali sono (QRA Locator JN53sq):

**43° 45' 56,0” NORD**
**11° 23' 50,8” EST**

Le stesse coordinate si possono esprimere in gradi decimali. Di seguito come passare da un sistema all'altro.

Ad esempio per trasformare la latitudine di Poggio Alberaccio in gradi decimali:

**43° 45' 56,0” = (43 + 45/60 + 56,0/3600) = 43 + 0,75 + 0,015) = 43,765 °**

Invece dei gradi per misurare un angolo si possono adoperare i radianti, molto più comuni in fisica ed elettronica. La proporzione fra gradi e radianti è la seguente:

$$\alpha_{rad} / 2\pi = \alpha_{gradi} / 360$$

Per esempio proviamo a trasformare la latitudine del Poggio da gradi in radianti:

$$\alpha = 43{,}765° \longrightarrow [(43{,}765/360) * 2\pi] = 0{,}76 \text{ rad}$$

Di seguito alcune corrispondenze gradi – radianti per alcuni angoli:

| Gradi | Radianti |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 30° | π/6 |
| 45° | π/4 |
| 60° | π/3 |
| 90° | π/2 |
| 180° | π |
| 270° | 3π/2 |
| 360° | 2π |

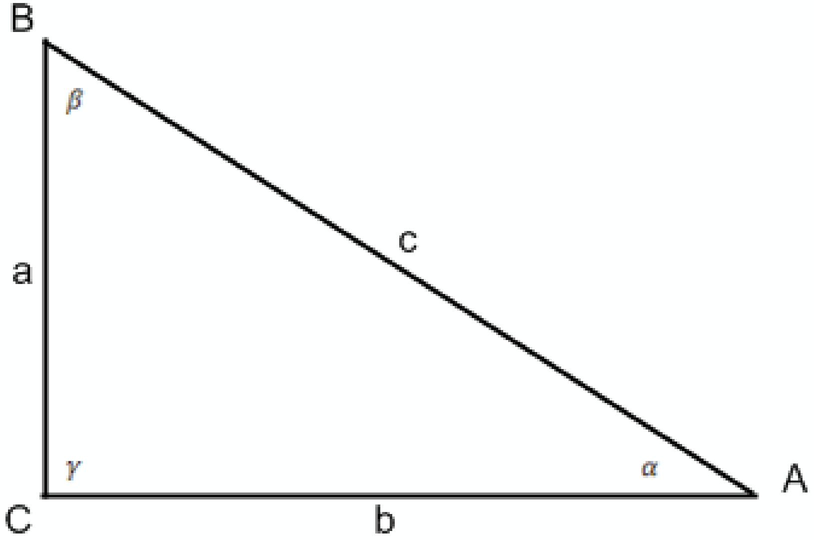
Fatta la pausa relativa agli angoli e al modo di misurarli, torniamo al nostro problema della misura dell'altezza del traliccio. Abbiamo bisogno di fare ancora un po' di teoria, introducendo le funzioni trigonometriche, le più importanti delle quali sono il seno, il coseno, la tangente e la cotangente. Consideriamo un triangolo rettangolo, come quello di figura e prendiamo in considerazione l'angolo acuto α, si hanno le seguenti definizioni:

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \mathrm{tg}\ \alpha = a / b$$

$$\cos \alpha / \sin \alpha = \mathrm{ctg}\ \alpha = b / a$$

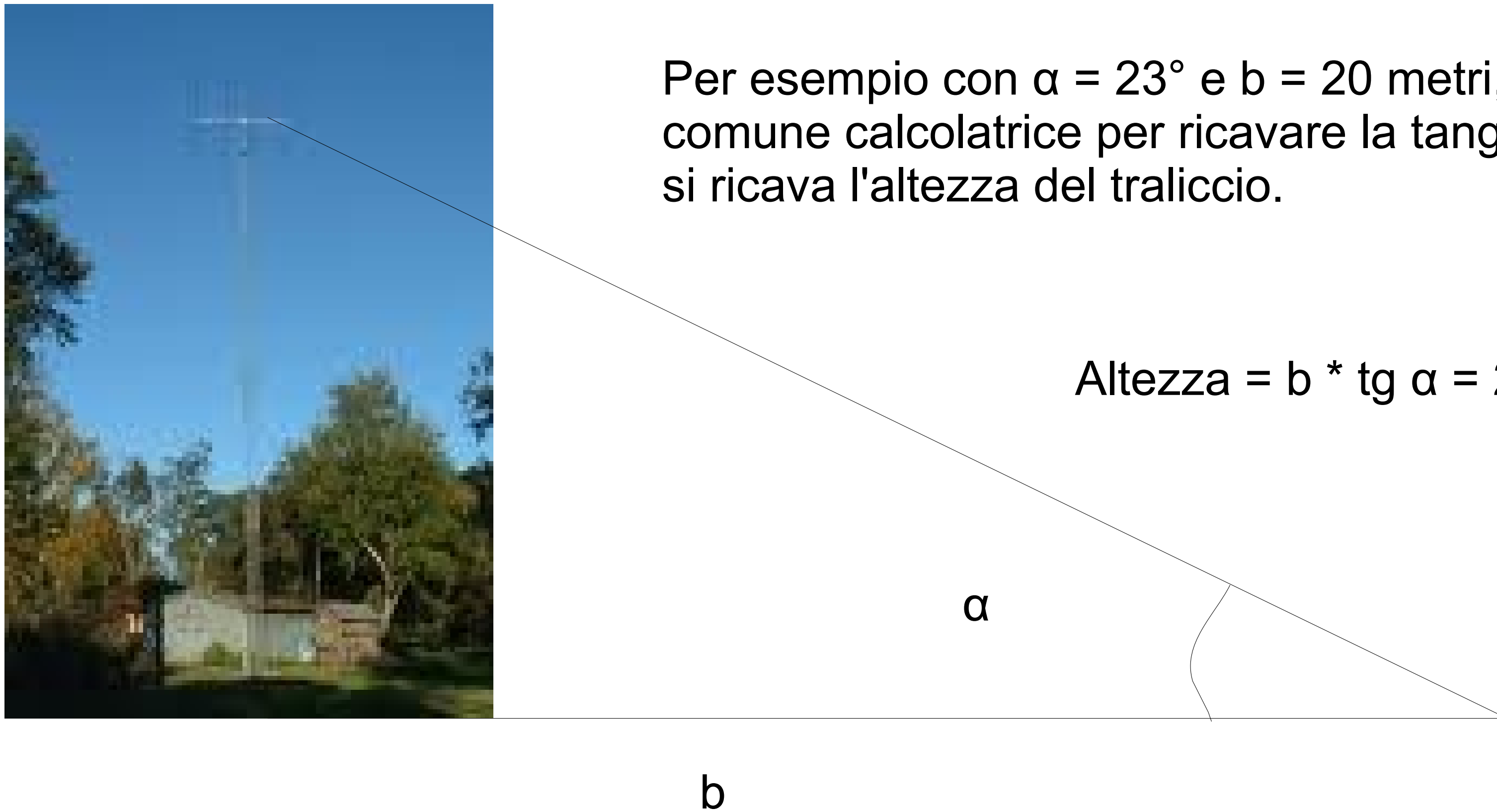



Considerando queste funzioni trigonometriche è facile ora calcolare l'altezza del traliccio. Poniamo che il cateto a rappresenti il traliccio, la nostra posizione sia nel punto A, misurando in qualche modo l'angolo con cui vediamo la cima del traliccio (angolo α) e la distanza fra noi e il traliccio, utilizzandola definizione di tangente($\mathrm{tg}\ \alpha = a/b$) otteniamo:

$$a = b * \mathrm{tg}\ \alpha$$

Per esempio con α = 23° e b = 20 metri, utilizzando una comune calcolatrice per ricavare la tangente dell'angolo α, si ricava l'altezza del traliccio.

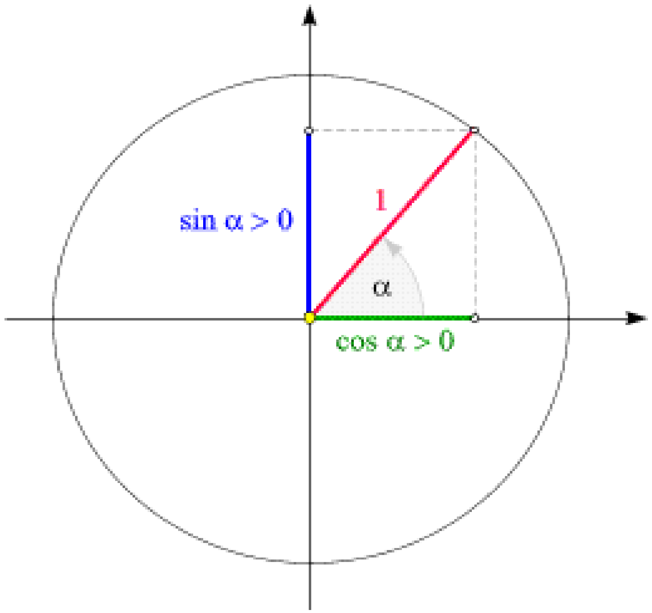
Altezza = b * tg α = 20 * 0,43 = 8,6

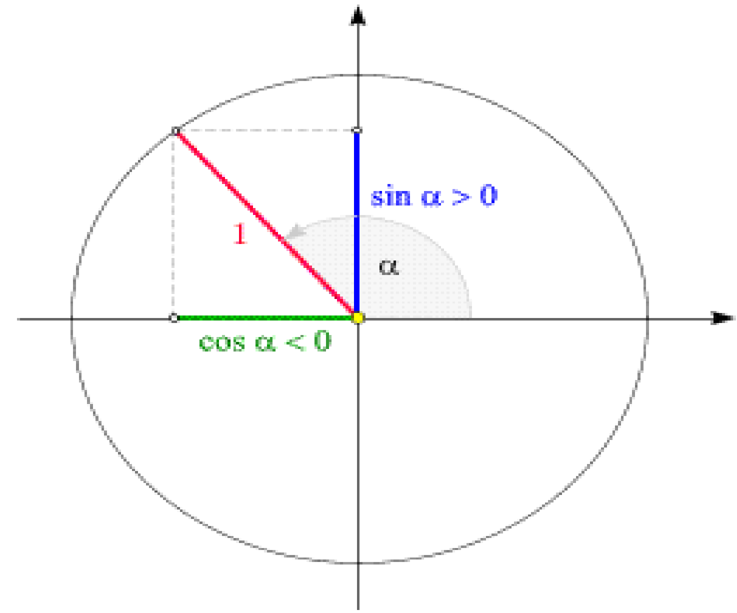


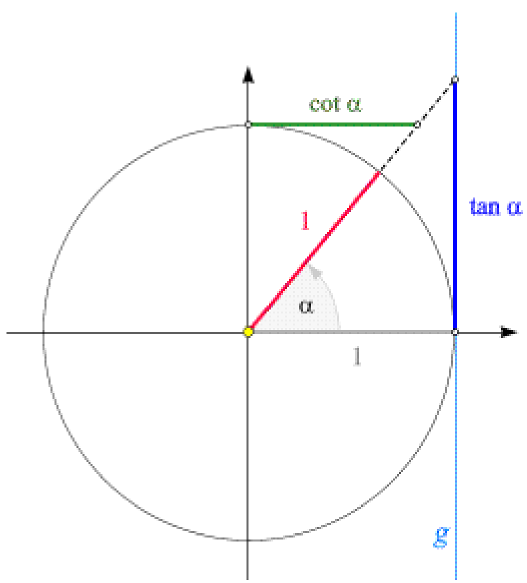

Per finire questa introduzione alla trigonometria è interessante anche vederela rappresentazione del seno e del coseno nel cerchio unitario (cerchio centrato nell'origine degli assi cartesiani e con raggio uguale ad 1.

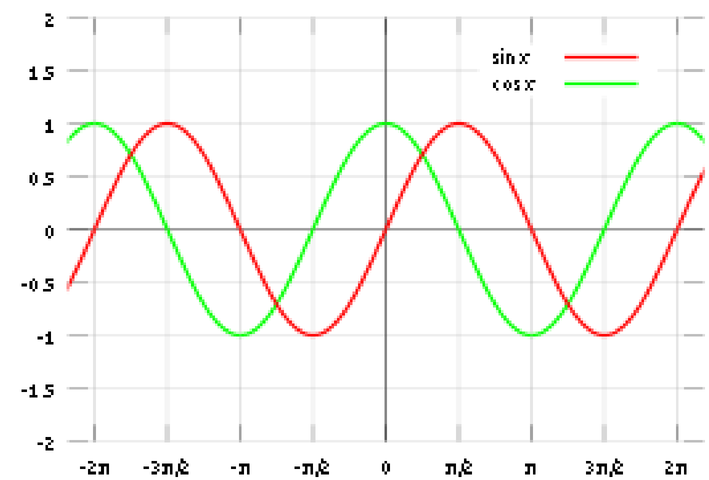
Una delle proprietà importanti del seno e del coseno è la seguente relazione (Teorema di Pitagora)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$


sin α > 0
1
α
cos α > 0


sin α > 0
1
α
cos α < 0


cot α
tan α
1
α
1
g


sin x
cos x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π

# Le funzioni esponenziali e logaritmiche

Quante volte nelle nostre conversazioni parliamo di decibel... guadagno dell' antenna, livello di segnale ricevuto, etc; vediamo di ricordare quale è il significato.
Le funzioni logaritmiche e esponenziali sono rispettivamente inverse una all'altra, come la divisione e la moltiplicazione.

Le funzioni esponenziali sono fra le più importanti della matematica e vengono adoperate spesso anche in elettronica e telecomunicazioni.

La forma di una funzione esponenziale è la seguente:

$$f(x) = e^x$$

Le principali proprietà delle funzioni essponenziali sono:

$A^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{x+y} = a^x \ a^y \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad 1/a^x = (1/a)^x = a^{-x} \quad a^x b^x = (ab)^x$

Le espressioni contenenti frazioni o radici possono essere semplificate, utilizzando la notazione esponenziale:

$$1/a = a^{-1} \qquad \sqrt[n]{a^b} = a^{b/n}$$

La funzione logaritmo è la funzione inversa rispetto alla funzione esponenziale: si dice logaritmo in base a di un numero x l'esponente da dare ad a per ottenere x- In altre parole se

$x = a^y$ segue che $y = \log_a x$

L'uso del logaritmo è molto utile perchè si possono trasformare i prodotti in somme, i rapporti in differenze, gli elevamenti a potenza in moltiplicazioni e i radicali in divisione. Valgono cioè le seguenti relazioni:

$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ $\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ $\log(x^k) = k \log(x)$

Le basi più utilizzate sono la base 10 (logaritmi decimali) che si indicano con la lettera L maiuscola (Log) e i logaritmi naturali in base e che si indicano con la l minuscola (log).

Torniamo ora ai logaritmi che ci interessano più da vicino e che fanno parte del nostro linguaggio di radioamatori.

Per misurare il guadagno di un amplificatore o quello di un'antenna vengono adoperati normalmente i decibel (dB). Un decibel (un decimo del bel).

Consideriamo ad esempio un amplificatore per le onde corte

Potenza in ingresso Pi


Potenza in uscita Po

Il guadagno dell' amplificatore può essere espresso in dB

$$G_{db} = 10 \text{ Log } (P_o/P_i)$$

Se si adopera invece della potenza la tensione di ingresso e uscita, ricordando che $P = V^2/R$ si ha:

$$G_{dB} = 10 \text{ Log}(V_o/V_i)^2 = 20 \text{ Log}(V_o/V_i)$$

Per esempio se un amplificatore genera una tensione di 1 V su di un carico di 1 ohm, nel carico fluisce una corrente di 1 A e quindi viene dissipata una potenza di 1 W. Se si modifica l'amplificatore in modo che sullo stesso carico si abbia una uscita di 10 V e quindi una corrente di 10 A, la potenza dissipata passa a (10x10) a 100 W, si ha quindi un guadagno sulla tensione pari a 10 volte

$$G_V = 20 \text{ Log } (10) = 20 \text{ dB} \qquad (\text{Log}(10) = 1)$$

E un guadagno sulla potenza di 100 volte pari sempre a:

$$G_P = 10 \text{ Log } (100) = 20 \text{ dB} \qquad (\text{Log}(100) = 2)$$

In ultimo vediamo il $dB_m$ ( $dB_{mW}$). Il dbm indica il rapporto di potenza rispetto alla potenza di riferimento di 1 mW. Vediamo alcuni valori del dBm:

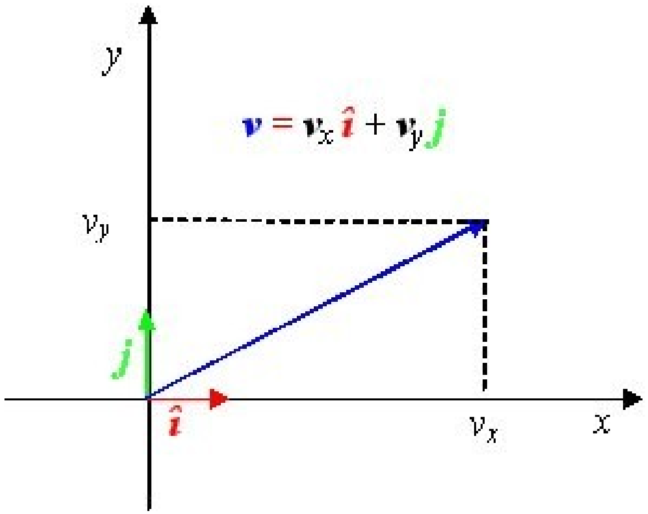
0 dBm = 1mW,  3 dBm ( raddoppio della potenza) = 2 mW, 30 dBm = 1 W

50 dBm = 100 W, 60 dBm = 1 kW (la potenza di Mauro !!!!)

# Vettori

In fisica si incontrano essenzialmente due tipi di grandezze gli scalari e i vettori. Un esempio di grandezza scalare è la temperatura, per definirla occorre solo un numero, si dice normalmente oggi fa caldo ci sono 30° C. Per molte altre grandezze non è sufficiente dare solo un numero, per esempio la velocità, non è sufficiente dire a quanti km/h si sta viaggiando ma per sapere dove siamo, dopo un certo periodo di tempo, è necessario conoscere da dove siamo partiti che strada stiamo facendo e in che direzione.

La velocità è quindi un vettore




In questa figura si può vedere la rappresentazione di un vettore sul piano di coordinate cartesiane.
In questa figura si vedono anche i versori (vettori di modulo unitario) indicati con i e j con il segno ^.
$V_x$ è la proiezione del vettore sull'asse delle ascisse e $v_y$ la proiezione su quello delle ordinate.